

[.....]

[.....]

[.....]

Arithmetische Folgen höherer Ordnung

Facharbeit im Fach Mathematik

vorgelegt von:

Timo Schmidt

[.....]

[.....]

Schüler der Jahrgangsstufe 9

Betreuende Fachlehrerin: [.....]

Bearbeitungszeitraum: 08.11.2018 – 04.03.2019

Abgabetermin: 01.03.2019

Abgabedatum: 04.03.2019

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Definition/Notation von allgemeinen Folgen	4
3	Arithmetische Folgen erster Ordnung	4
3.1	Arithmetische Folgen nullter Ordnung	4
3.2	Bildungsgesetze und Berechnung	4
3.2.1	Rekursive Berechnung	5
3.2.2	Explizite Berechnung	5
3.2.3	Polynomdarstellung von arithmetischen Folgen erster Ordnung	6
4	Arithmetische Folgen zweiter Ordnung	6
4.1	Quadratzahlen	6
4.2	Dreieckszahlen	7
5	Pascalsches Dreieck	8
5.1	Darstellung durch Binomialkoeffizienten	8
5.2	Arithmetische Folgen im Pascalschen Dreieck	9
6	Differenz-/Summenfolgen	10
6.1	Formale Definition	10
6.2	Differenz-/Summenschemata	11
7	Berechnung jeder Arithmetischen Folge	12
8	Zusammenfassung	18
9	Anhang	20
	Quellen-/Literaturverzeichnis	23
	Selbstständigkeitserklärung	24

1 Einleitung

In der Schule wird das Thema „Arithmetische Folgen“ vielleicht unterrichtet, aber „Arithmetische Folgen höherer Ordnung“ kommen im normalen Schulunterricht kaum vor. Diese Arbeit soll das Thema verständlich erklären und interessierten Lesern einen tieferen Einblick in das Thema verschaffen. Erfahrene Leser werden erkennen, dass dieses Thema ein Teilgebiet der Differenzenrechnung ist, welche das diskrete Analogon zur Analysis ist, nur dass hier Stetigkeit keine Rolle spielt (da arithmetische Folgen sich hauptsächlich für ganze Zahlen interessieren). Teile der Differenzenrechnung wurden im gleichen Jahrhundert behandelt wie die Analysis (damals Infinitesimalrechnung¹), z.B. beschäftigte sich der deutsche Mathematiker J. Faulhaber² um 1622 intensiv mit Potenzreihen³ und figurierten Zahlen⁴ (Teilgebiet arithmetischer Folgen). Zum Ende der Arbeit soll geklärt sein, wie man aus jeder arithmetischen Folge k -ten Grades mit mindestens $k + 1$ gegebenen aufeinanderfolgenden Gliedern ein Polynom k -ten Grades finden kann. Dabei muss bzw. kann das Polynom nicht in seiner Standardform sein, da die Methoden, die benutzt werden, Binomialkoeffizienten gebrauchen, was zu dem Problem führt, dass Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ die Form $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{k!}$ haben, was wiederum dazu führt, dass der Zähler des Bruches (ausgeklammert) ein Polynom ist, dessen Koeffizienten Stirling Zahlen erster Art sind. Bis jetzt gibt es noch keine wirklich effiziente und explizite Formel zur Berechnung dieser Zahlen⁵.

¹ Die Analysis ist nicht identisch mit Infinitesimalrechnung, aber sie baute auf ihr auf

² Johannes Faulhaber (05.05.1580-10.09.1635), bekannt durch seine Faulhaberpolynome

³ Potenzsumme mit aufsteigender Basis von 1 bis n und gleichem Exponenten ($1^k + 2^k + \dots + n^k$)

⁴ Potenzsummen und figurierte Zahlen detailliert behandelt in seiner *Miracula Arithmetica* 1622

⁵ s. Anhang

2 Definition/Notation von allgemeinen Folgen

Nach Wikipedia⁶ ist eine Folge im Allgemeinen „eine Auflistung von endlich oder unendlich vielen Objekten“, im Falle dieser Arbeit nur eine Folge mit unendlich vielen Zahlen. Folgen lassen sich wie folgt darstellen: $(a_i)_{i=0,2,3,\dots,n}$. Dies ist eine Auflistung von den $n + 1$ Elementen $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Offensichtlich gilt das nur für endliche Folgen. Für unendliche Folgen braucht man eine andere Notation, z.B. kann die Folge der natürlichen Zahlen wie folgt notiert werden $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$, anders notiert $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$. Man kann eine Folge auch durch eine Bildungsvorschrift beschreiben, z.B. führt $a_i = 2i$ zur Folge der geraden Zahlen $(0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ für $i \in \mathbb{N}_0$. Für diese Arbeit wird anstelle von a_i auch $f(n)$ verwendet, wobei $n = i$ gilt. $f(n) = n^2$ führt also zu der Folge $(0, 1, 4, 9, 16, \dots)$. Wichtig ist, um es nicht immer wieder zu erwähnen, dass in dieser Arbeit sowohl für i als auch für n immer der Definitionsbereich $\mathbb{N}_0$ ⁷ bestimmt ist. Beim ersten Glied einer Folge ist vom nullten Element die Rede, d.h. das nullte Element bzw. das erste Glied der Folge $(0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ ist 0.

3 Arithmetische Folgen erster Ordnung

3.1 Arithmetische Folgen nullter Ordnung

Die wohl einfachste arithmetische Folge ist die von der Ordnung 0. Diese Folge ist nichts Weiteres als eine unendliche Folge aus gleich bleibenden Gliedern (stationäre Folge), also $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ oder $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots)$. So unwichtig sie erscheinen mag, für die Vollständigkeit ist es besser sie aufzulisten und letztendlich spielt sie eine große Rolle für alle anderen arithmetischen Folgen.

3.2 Bildungsgesetze und Berechnung

Für arithmetische Folgen erster Ordnung gilt, dass jedes Element um einen bestimmten und konstanten Wert größer ist als das vorherige Element. Hat man z.B. die Folge $(0, 3, 6, 9, 12, \dots)$, sieht man, dass jedes Element genau um den Wert 3 größer ist als das vorherige (12 ist 3 größer als 9, 9 ist 3 größer als 6 und 3 ist 3 größer als 0. Für das erste Element gilt das nicht.). Im Allgemeinen ist ein beliebiges Element minus das vorherige Element die Differenz bzw. der Wert, der in der obigen Beispielfolge 3 ist. Hat man also die Differenz d und das erste Glied a_0 gegeben, kann man sich jedes Element der Folge berechnen

⁶ [https://de.wikipedia.org/wiki/Folge_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Folge_(Mathematik)) (zuletzt bearbeitet am: 19.11.2018, 22:31)

⁷ Mit $\mathbb{N}_0$ sind alle Natürlichen Zahlen mit 0 gemeint, also $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

3.2.1 Rekursive Berechnung

Nehmen wir nochmal die Folge (0, 3, 6, 9, 12 ...) und die Tatsache, dass jedes Element 3 größer ist als das vorherige. Dann können wir eine rekursive Vorschrift bilden, also eine Bildungsvorschrift, bei der jedes Element mithilfe des vorherigen berechnet wird. In unserem Falle wäre das $a_{i+1} = a_i + 3$. Setzen wir $i = 1$, kommt man auf $a_{1+1} = a_1 + 3 \Rightarrow 6 = 3 + 3 \Rightarrow 6 = 6$ w.A. Es ist ziemlich leicht zu sehen, dass das für alle Elemente dieser Folge gilt. Allgemein gilt bei gegebenen a_0 und gegebener Differenz die rekursive Bildungsvorschrift $a_{i+1} = a_i + d$. Beispielsweise bei $a_0 = 7$ und $d = 5$ bekommt man die Folge (7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, ...). Da der kleinste Wert von i null sein kann, ist a_0 nicht durch die rekursive Formel bestimmt, aber das ist nicht schlimm, da a_0 sowieso gegeben sein muss, um die komplette Folge zu berechnen.

3.2.2 Explizite Berechnung

Jetzt kommt man aber zu einem Problem: Um ein beliebiges Element zu berechnen, benötigt man das erste Element, um das zweite zu berechnen, das zweite, um das dritte zu berechnen und so weiter. Mit Rekursion könnte man nicht ohne Weiteres das tausendste Element der obigen Folge berechnen, auch nicht mit einem handelsüblichen Taschenrechner. Dies ist aber kaum ein Problem, da sich solche Folgen auch explizit, also direkt mit einer Formel berechnen lassen können. Schreibt man z.B. eine allgemeine arithmetische Folge erster Ordnung $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ rekursiv auf, kommt man auf $(a_0, a_0 + d, a_1 + d, a_2 + d, \dots)$. Wenn man jetzt alle Variablen außer a_0 durch a_0 ersetzt, kommt man auf $(a_0, a_0 + d, a_0 + d + d, a_0 + d + d + d, \dots)$. Nun ist offensichtlich, dass zu dem ersten Element immer nur Vielfache von d addiert werden. Man kann sich folgende Tabelle erstellen:

a_i	Wert
a_0	$a_0 + 0 \times d$
a_1	$a_0 + 1 \times d$
a_2	$a_0 + 2 \times d$
a_3	$a_0 + 3 \times d$
a_4	$a_0 + 4 \times d$
...	...
a_i	$a_0 + i \times d$

Auf ganz natürliche Weise haben wir eine Formel für das n -te Glied gefunden, nämlich $a_i = a_0 + i \times d$.

Tabelle 1

3.2.3 Polynomdarstellung von arithmetischen Folgen erster Ordnung

Das Bildungsgesetz für arithmetische Folgen erster Ordnung lässt sich auch als lineare Funktion (bzw. Polynom) darstellen. Will man z.B. die Folge $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ durch eine lineare Funktion beschreiben, so wäre eine passende Möglichkeit $f(n) = 2n + 1$. Da das erste Element der Folge a_0 ist (Index $i = 0$), sollte auch für die lineare Funktion der gleiche Wert herauskommen, wenn $n = 0$. Setzt man 0 in die Funktion ein, kommt man auf $f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$, was stimmt. Diese Darstellung kann hilfreicher und verständlicher sein, vor allem für kompliziertere Folgen und für Leute, die mit dieser Schreibweise bereits vertraut sind. Dazu hat diese Variante die Eigenschaft, dass man kein ganzzahliges n braucht, da die Funktion offensichtlich stetig⁸ ist.

4 Arithmetische Folgen zweiter Ordnung

4.1 Quadratzahlen

Jetzt wird es schon etwas interessanter. Arithmetische Folgen zweiter Ordnung sind Folgen, bei denen die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Glieder nicht mehr konstant sind, wie es bei arithmetischen Folgen erster Ordnung der Fall ist. So führt die arithmetische Folge zweiter Ordnung, die durch die Funktion $f(n) = n^2$ beschrieben wird, zu der Folge der Quadratzahlen $(0, 1, 4, 9, 16, \dots)$. Nimmt man nun die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder dieser Folge und bildet aus diesen wiederum eine neue Folge, eine Differenzfolge, so erhält man $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$. Die Glieder dieser Folge sind nicht konstant. Für den Fakt, dass die Glieder der Differenzfolge ungerade sind, gibt es eine schöne und berühmte Veranschaulichung.

<u>1</u>	2	5	10	17	26	37
<u>4</u>	3	6	11	18	27	38
<u>9</u>	8	7	12	19	28	39
<u>16</u>	15	14	13	20	29	40
<u>25</u>	24	23	22	21	30	41
<u>36</u>	35	34	33	32	31	42
<u>49</u>	48	47	46	45	44	43

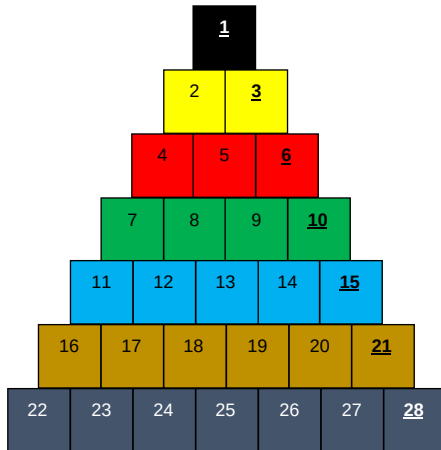
Abb. 1

In der linken Spalte stehen die Quadratzahlen. Die erste ist hier die 1 und, um zur 4 zu kommen, muss man 3 addieren. Um zur 9 zu kommen, muss man 5 addieren und um zur 16 zu kommen, muss man 7 addieren usw., also die ungerade Zahlen.

⁸ <https://de.wikipedia.org/wiki/Stetigkeit> (zuletzt bearbeitet am: 03.03.2019, 15:43)

4.2 Dreieckszahlen

Was passiert jetzt, wenn man anstatt der ungeraden Zahlen alle natürlichen Zahlen benutzt, d.h. wenn man bei 0 beginnt, 1 addiert, dann 2 addiert, dann 3 usw.? Dies kann man auch veranschaulichen:



Die rechts stehenden Zahlen sind die sogenannten Dreieckszahlen⁹. Es stellt sich wieder die Frage, wie sich diese berechnen lassen. Schon aus dem Bildungsgesetz wird klar, dass man, um auf die n -te Dreieckszahl zu kommen, n auf die $(n-1)$ -te Dreieckszahl addieren muss. Um z.B. auf die vierte Dreieckszahl zu kommen (10), muss man 4 auf die dritte Dreieckszahl (6) addieren. Man kann die Dreieckszahlen also auch mit der Funktion

Abb. 2

$f(n) = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1$ berechnen. Dreht man die Reihenfolge der Addierung um und addiert dieses zu der ursprünglichen dazu, bekommt man:

$$f(n) = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$+f(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

$$2f(n) = \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1)}_{n \text{ Terme}}$$

$$\Rightarrow 2f(n) = n \times (n + 1)$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Die Folge der Dreieckszahlen wäre damit 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

⁹ Von manchen Autoren auch Trigonalzahlen, Triangularzahlen oder Triagonalzahlen genannt (vgl. Ziegenbalg 2018, S.9, Z. 1f)

5 Pascalsches Dreieck

0	1								
1	11								
2	121								
3	1331								
4	14641								
5	15101051								
6	1615201561								
	0	1	2	3	4	5	6		

Abb. 3

Das neben stehende Dreieck ist das Pascalsche Dreieck. Jede Zahl in jedem „Kästchen“ wird auf eine ganz bestimmte Weise gebildet, und zwar, indem man die beiden Zahlen über dieser Zahl addiert. Die Zahlen am Rand sind immer 1. Um es leichter zu beschreiben, kann man das Dreieck auch in eine Tabelle übertragen, damit leichter zu sagen ist, von welcher Zahl im Dreieck man redet.

k	0	1	2	3	4	5	6
n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Tabelle 2

Da es jetzt in dieser Form ist, kann man von der n -ten Spalte und der k -ten Reihe reden. Z.B. ist in der vierten Spalte und der sechsten Reihe die Zahl 15. Dieses Dreieck hat eine große Menge besonderer Eigenschaften, die aber nicht sehr relevant für diese Arbeit sind.

5.1 Darstellung durch Binomialkoeffizienten

Eine jedoch sehr relevante Eigenschaft ist, dass sich das Pascalsche Dreieck durch Binomialkoeffizienten darstellen lässt. Ein Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ kann wie folgt berechnet werden: $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ wobei $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ und $0! = 1$.

Z.B. ist $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. Diese Binomialkoeffizienten haben eine Eigenschaft, die wir nutzen können:

k	0	1	2	3	4	5	6
n							

0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

alle Tabelleneinträge durch Binomialkoeffizienten ersetzt werden können.

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Diese Identität besagt schlussendlich genau die Eigenschaft, die das Pascalsche Dreieck hat, nämlich, dass jedes Element die Summe der beiden darüber liegenden Elemente ist. In den Tabelle 2 wurden n und k bereits als Angaben in Reihen und Spalten benutzt, weil man dadurch eine analoge Tabelle erstellen kann, bei der

Tabelle 3

5.2 Arithmetische Folgen im Pascalschen Dreieck

In Tabelle 2 des Pascalschen Dreiecks besteht die erste Spalte (also wenn $k = 0$) nur aus der Zahl 1. Die zweite Spalte (wenn $k = 1$) besteht aus den natürlichen Zahlen und die dritte Spalte besteht nur aus den Dreieckszahlen. Diesen Fakt kann man sich zu Nutze machen, da sich das Pascalsche Dreieck durch Binomialkoeffizienten ersetzen lässt. Durch Tabelle 3 kann man ein Bildungsgesetz für die Dreieckszahlen finden, nämlich $\binom{n}{2}$, wobei die erste Dreieckszahl berechnet wird, wenn $n = 2$. Stellt man den Binomialkoeffizienten in seiner anderen Form da, bekommt man $\frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \frac{n \times (n-1)}{2}$, was im Vergleich zu der bereits in 4.2 berechneten Formel das gleiche ist, nur um 1 verschoben, d.h. wenn $n = 3$, dann berechnet die Formel aus 4.2 die dritte Dreieckszahl, nämlich 6, und die gerade berechnete Formel berechnet die zweite Dreieckszahl, nämlich 3. Analog wäre eine Formel für die Berechnung der natürlichen Zahlen $\binom{n}{1}$, was umgeformt einfach n ergibt. Da Dreieckszahlen die Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sind und sich beide durch Binomialkoeffizienten darstellen lassen, kann man diese Formel aufstellen: $\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \dots + \binom{n-1}{1} + \binom{n}{1} = \binom{n}{2}$, was sich im Pascalschen Dreieck überprüfen lässt. Addiert man aufeinanderfolgende Dreieckszahlen, ergeben sich die sogenannten Tetraederzahlen¹⁰. Wieder lässt sich mithilfe von Binomialkoeffizienten eine Formel aufstellen: $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} +$

¹⁰ Auch genannt: Pyramidenzahlen, selten: 3-Simplex-Zahlen

$\binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{n}{3}$. Dieses Spiel lässt sich beliebig oft wiederholen. Summen aufeinanderfolgender Tetraederzahlen sind die Pentatopzahlen. Addiert man davon aufeinanderfolgende Glieder erhält man die 5-Simplex-Zahlen. Addiert man diese, erhält man die 6-Simplex-Zahlen usw. Alle diese Zahlen bilden arithmetische Folgen.

6 Differenz-/Summenfolgen

6.1 Formale Definition

Hat man eine beliebige Folge $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots)$, dann kann man Differenzen aufeinanderfolgender Glieder bilden (wie in 4.1). Es entsteht eine neue Folge, bei der das erste Glied $a_1 - a_0$ ist, das zweite $a_2 - a_1$ usw., also $(a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, a_5 - a_4, \dots)$. Bezeichnet man das erste Glied der Differenzfolge als D_0^1 , das zweite als D_1^1 usw., dann bildet sich die Folge $(D_0^1, D_1^1, D_2^1, D_3^1, \dots)$. Die hochgestellte 1 bedeutet, dass es die erste Differenzfolge ist. Die zweite Differenzfolge wäre die Differenzfolge der ersten Differenzfolge, also $(D_0^2, D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2, D_5^2, D_6^2, \dots)$, wobei $D_0^2 = D_1^1 - D_0^1$ gilt. Analog kann man sagen, dass $a_0 = D_0^0$, $a_1 = D_1^0$ bzw. $a_n = D_n^0$. Für die Differenzfolgen kann man allgemein sagen: $D_n^k = D_{n+1}^{k-1} - D_n^{k-1}$. Als Summenfolge einer Ausgangsfolge ist eine Folge zu verstehen, deren Differenzen aufeinanderfolgender Glieder eine Folge bilden, die der Ausgangsfolge gleich ist. Bei der Ausgangsfolge $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$ gäbe es z.B. unendlich viele Summenfolgen, deren Differenzen aufeinanderfolgender Glieder diese Ausgangsfolge bilden. Hat man die Summenfolge $(0, 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots)$, dann bilden die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder die Folge $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$. Das gleiche gilt aber auch für die Summenfolge $(3, 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, \dots)$. Letztendlich hängt die Summenfolge nicht nur von der Ausgangsfolge, sondern auch von dem ersten Glied der Summenfolge ab.¹¹ Formal kann man sagen, dass die Summenfolge $(S_0^1, S_1^1, S_2^1, S_3^1, S_4^1, S_5^1, S_6^1, \dots)$ von einer Ausgangsfolge $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$ mit dem ersten definierten Glied S_0^1 gleichgesetzt werden kann mit der Folge $(S_0^1, S_0^1 + a_0, S_0^1 + a_0 + a_1, S_0^1 + a_0 + a_1 + a_2, S_0^1 + a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \dots)$ ¹². Diese Folge ist offensichtlich nur durch das Anfangsglied S_0^1 und die Ausgangsfolge definiert. Man kann, wie bei den Differenzfolgen auch, die gleiche Prozedur wiederholen und die Summenfolge der Summenfolge (der Ausgangsfolge) bilden. Man bräuchte wieder ein Anfangsglied S_0^2 und dann würde sich die Summenfolge $(S_0^2, S_0^2 + S_0^1, S_0^2 + S_0^1 + S_1^1, S_0^2 + S_0^1 + S_1^1 + S_2^1, S_0^2 + S_0^1 + S_1^1 + S_2^1 + S_3^1, \dots)$ ergeben. Allgemein kann man für Summenfolgen sagen $S_k^n = S_{k-1}^n + S_{k-1}^{n-1}$.

¹¹ Ähnlich wie bei einer Stammfunktion das Addieren einer Konstante

¹² Färbung für bessere Lesbarkeit

6.2 Differenz-/Summenschemata

Für eine deutlich bessere Lesbarkeit der Differenz- und Summenfolgen kann man diese auch grafisch darstellen. Die Differenzfolgen sähen dann so aus:

a_0
D_0^1
a_1 D_0^2
D_1^1 D_0^3
a_2 D_1^2 D_0^4
D_2^1 D_1^3
a_3 D_2^2
D_3^1
a_4

Schema 1

0
1
1 1
2 0
3 1 0
3 0
6 1
4
10

Schema 2

Auf diese Art und Weise lassen sich die Differenzfolgen deutlich leichter darstellen und besser verstehen. Die Spalte ganz links ist die Ausgangsfolge, die Spalte eins weiter rechts ist die erste Differenzfolge (Differenzfolge ersten Grades), die Spalte eins weiter rechts ist die Differenzfolge zweiten Grades usw. In dem Beispielschema für die Ausgangsfolge (0,1,3,6,10) sind die Zusammenhänge der Differenzen besser verständlich, als würde man sie formal nennen. Für die Summenfolgen sähe es so aus:

		S_0^4	
		S_0^3	
	S_0^2	S_1^4	
	S_0^1	S_1^3	
a_0	S_1^2	S_2^4	
	S_1^1	S_2^3	
a_1	S_2^2	S_3^4	
	S_2^1	S_3^3	
a_2	S_3^2	S_4^4	
	S_3^1	S_4^3	
a_3	S_4^2	S_5^4	
	S_4^1	S_5^3	
	S_5^2	S_6^4	
		S_6^3	
		S_7^4	

		0	
		0	
	0	0	
	0	0	
1	0	0	
	1	0	
1	1	0	
	2	1	
1	3	1	
	3	4	
1	6	5	
	4	10	
	10	15	
		20	
			35

In dem Beispielschema der Summenfolgen ist die Ausgangsfolge (1,1,1,1) und das Überraschende ist, dass in dem Schema das Pascalsche Dreieck versteckt ist. Das liegt an dem Bildungsgesetz für Summenfolgen $S_k^n = S_{k-1}^n + S_{k-1}^{n-1}$, welches gleich dem Bildungsgesetz für das Pascalsche Dreieck ist. Dies funktioniert nur, wenn man als Anfangsglieder der Summenfolgen 0 nimmt.

7 Berechnung jeder Arithmetischen Folge

Die Methode, um jede (nicht nur arithmetische) Folge zu berechnen, wurde von Newton gefunden. Um sie zu verstehen, muss man sich ein Differenzschema wie folgendes vorstellen:

a					
$a + b$	b				
		c			
$a + 2b + c$	$b + c$		d		
		$c + d$		e	
$a + 3b + 3c + d$	$b + 2c + d$		$d + e$		0
		$c + 2d + e$		e	
$a + 4b + 6c + 4d + e$	$b + 3c + 3d + e$		$d + 2e$		0
		$c + 3d + 3e$		e	
$a + 5b + 10c + 10d + 5e$	$b + 4c + 6d + 4e$		$d + 3e$		
		$c + 4d + 6e$			
$a + 6b + 15c + 20d + 15e$	$b + 5c + 10d + 10e$				

Schema 5

Die Ausgangsfolge ist

$(a, a + b, a + 2b + c, a + 3b + 3c + d, a + 4b + 6c + 4d + e, a + 5b + 10c + 10d + 5e, a + 6b + 15c + 20d + 15e)$.

Die erste Differenzfolge ist

$(b, b + c, b + 2c + d, b + 3c + 3d + e, b + 4c + 6d + 4e, b + 5c + 10d + 10e)$,

die zweite ist

$(c, c + d, c + 2d + e, c + 3d + 3e, c + 4d + 6e)$,

die dritte ist

$(d, d + e, d + 2e, d + 3e)$

und die vierte ist (e, e, e) , welche eine arithmetische Folge nullten Grades ist. Die nächste Differenzfolge wäre $(0, 0)$, da die Elemente in der vierten Differenzfolge alle gleich sind und die Differenz aufeinanderfolgender Glieder 0 ist. Die sechste wäre somit auch 0 und alle weiteren auch. Gesucht ist eine Funktion $f(n)$, die für $n = 0$ das erste Glied der arithmetischen Folge wiedergibt, also a , für $n = 1$ das zweite, also $a + b$ usw. Da jedes Glied der Folge nur eine Summe der Variablen a, b, c, d, e ist, kann man schreiben $f(n) = a \times x_1 + b \times x_2 + c \times x_3 + d \times x_4 + e \times x_5$, wobei die Werte von x noch unbekannt sind. Nehmen wir temporär an, dass (e, e, e) die Ausgangsfolge ist, dann ist $(d, d + e, d + 2e, d + 3e)$ die erste Summenfolge mit dem Anfangsglied d . Die zweite Summenfolge wäre $(c, c + d, c + 2d + e, c + 3d + 3e, c + 4d + 6e)$ mit dem Anfangsglied c . Bei genauerer Betrachtung der ersten Summenfolge ist ersichtlich, dass zu dem Anfangsglied d erst nichts addiert wird. Für das nächste Glied wird ein e addiert. Für das dritte wird wieder ein e addiert und für das vierte wieder. Absolut gesehen werden zu dem d erst 0 Vielfache von e addiert, dann 1, dann 2, dann 3 usw. Betrachtet man diese

Zahlen als Folge, so ist dies die Folge der natürlichen Zahlen. Im ersten Glied ist ein d vorhanden, im zweiten wieder nur eins und das kann auch nur so bleiben, da es sich um eine Summenfolge handelt. Um nach Definition das nächste Glied in einer Summenfolge zu bestimmen, muss man ein Glied aus der Ausgangsfolge addieren. Da die Ausgangsfolge (e, e, e) nur aus dem Element e besteht, kann in den Gliedern der ersten Summenfolge immer nur ein d vorhanden sein. Guckt man sich nun die zweite Summenfolge an, erkennt man viele ähnliche Eigenschaften. Das Anfangsglied c wird pro Glied immer nur einmal addiert, wie das d bei der ersten Summenfolge auch immer nur einmal pro Glied addiert wird, beides durch den gleichen Grund. Da in der ersten Summenfolge das d , wie in der Ausgangsfolge das e , immer nur einmal vorkommt, addiert es sich auf dieselbe Art und Weise in die zweite Summenfolge, wie sich das e in der ersten addiert hat, d.h. in dem ersten Glied sind null d enthalten, in dem zweiten ein d , in dem dritten zwei usw. Für das e ist es so: In dem ersten Glied sind null e enthalten, in dem zweiten auch, in dem dritten ist eins enthalten, in dem vierten drei, dann sechs, dann zehn usw. Es ist keine sofortige Regelmäßigkeit zu erkennen, aber es stellt sich heraus, dass das die Dreieckszahlen sind. Dies ergibt auch Sinn, da vom zweiten zum dritten Glied in der zweiten Summenfolge erst ein e , dann zwei, dann drei, dann vier usw. addiert werden. Das ist eine Addition aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, was zur Folge der Dreieckszahlen führt, wie wir gezeigt haben. Für die dritte Summenfolge verhält es sich wieder sehr ähnlich. Das Anfangsglied b wird in jedem Glied einmal hinzuaddiert, ein Glied später anfangend wird das c addiert, erst einmal, dann zweimal, dann dreimal usw., und zwar so, dass die Anzahl, wie oft das c addiert wird, durch die Folge der natürlichen Zahlen beschrieben werden kann. Zwei Glieder später anfangend wird das d so addiert, dass die Anzahl wie oft es pro Glied addiert wird durch die Folge der Dreieckszahlen beschrieben werden kann. Die Glieder der Folge, die beschreibt wie oft das e addiert wird, werden durch Addition aufeinanderfolgender Dreieckszahlen, also die Tetraederzahlen, gebildet. Dieses Muster setzt sich fort, d.h. die Folgen, die beschreiben, wie oft die Variablen a, b, c, d, e zu einem Glied der vierten Summenfolge addiert werden, wären für a die Folge konstanter Einsen $(1, 1, 1, 1, \dots)$, für b die Folge der natürlichen Zahlen $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$, für c die Folge der Dreieckszahlen $(1, 3, 6, 10, \dots)$, und für die restlichen Variablen müsste es selbsterklärend sein. Dazu beginnen die Folgen um eins nach hinten versetzt an addiert zu werden, wie aus Schema 5 zu entnehmen ist und wie es auch schon erwähnt wurde. Wie in 5.2 gezeigt wurde, lassen sich genau diese Zahlen durch Binomialkoeffizienten darstellen, was wir uns zu großem Nutzen machen können. Die Folge der Einsen ist leicht durch den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}$ darzustellen, da $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \times 0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = 1$, d.h. der Wert dieses Binomialkoeffizienten ist immer 1, unabhängig von n . Da wir $f(0) = a$ wollen, müssen wir die Werte von x so anpassen, dass dies gilt. Da jeder der wichtigen Folgen, die wir besprochen haben,

mit 1 beginnt (s. Pascalsches Dreieck) und bei $f(0)$ nur ein a vorhanden ist, bei $f(1)$ ein b dazu kommt und bei $f(2)$ ein c dazu kommt usw., kann man die Binomialkoeffizienten so anpassen, dass diese erst ab einem bestimmten n anfangen, d.h. den ersten Wert 1 haben. Genau genommen muss man eigentlich gar nichts machen, da diese Eigenschaft schon auf natürliche Art und Weise vorhanden ist, nämlich durch Erhöhung des Wertes von k , „beginnt“ der Binomialkoeffizient automatisch eins später. Die Werte von x in $f(n) = a \times x_1 + b \times x_2 + c \times x_3 + d \times x_4 + e \times x_5$ wären dann folgende: $x_1 = \binom{n}{0}, x_2 = \binom{n}{1}, x_3 = \binom{n}{2}, x_4 = \binom{n}{3}$ und $x_5 = \binom{n}{4}$. Setzt man diese direkt in die Formel ein, erhält man folgende Formel: $f(n) = a \times \binom{n}{0} + b \times \binom{n}{1} + c \times \binom{n}{2} + d \times \binom{n}{3} + e \times \binom{n}{4}$. Und das ist auch schon die Formel für das gegebene Schema. Allgemein kann man sagen:

$$f(n) = a_0 \times \binom{n}{0} + D_0^1 \times \binom{n}{1} + D_0^2 \times \binom{n}{2} + \dots + D_0^{k-1} \times \binom{n}{k-1} + D_0^k \times \binom{n}{k},$$

wobei das k der Grad des Polynoms ist und die Werte von a die ersten Glieder der Differenzfolgen sind. In kompakterer Summenschreibweise wäre das

$$f(n) = a_0 + \sum_{i=1}^k D_0^i \times \binom{n}{i}^{13},$$

was genau die Formel ist, die Newton herausgefunden hat. Hat man zum Beispiel die Folge (2,13,44,107,214,377), dann sind die Differenzenfolgen (11,31,63,107,163), (20,32,44,56), (12,12,12), (0,0) usw. Die Anfangsglieder der Folgen sind 2,11,20,12,0,0, Die Werte, die 0 sind, kann man ignorieren, da sie mit einem Binomialkoeffizienten multipliziert immer noch 0 ergeben, also nichts zur Summe beitragen und somit zu vernachlässigen sind. Es bleiben also die vier Werte 2,11,20,12 übrig. In Newtons Formel eingesetzt erhält man $f(n) = 2 + \sum_{i=1}^3 D_0^i \times \binom{n}{i}$. Vielsagend ist das noch nicht, aber wenn man die Formel vereinfacht, bekommt man

$$f(n) = 2 \times \binom{n}{0} + 11 \times \binom{n}{1} + 20 \times \binom{n}{2} + 12 \times \binom{n}{3}$$

$$f(n) = 2 \times \frac{n!}{(n-0)! \times 0!} + 11 \times \frac{(n)!}{(n-1)! \times 1!} + 20 \times \frac{(n)!}{(n-2)! \times 2!} + 12 \times \frac{(n)!}{(n-3)! \times 3!}$$

$$f(n) = 2 \times 1 + 11 \times n + 20 \times \frac{n(n-1)}{2} + 12 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$f(n) = 2 + 11n + 10n(n-1) + 2n(n-1)(n-2)^{14}$$

$$f(n) = 2n^3 + 4n^2 + 5n + 2$$

¹³ Erklärung Summenschreibweise s. Anhang

¹⁴ Die Produkte sind Polynome mit Stirling Zahlen erster Art als Koeffizienten

Und das wäre auch schon das vollständige Polynom in seiner Standardform. Setzt man für n die Werte $0,1,2,3, \dots$ ein, bekommt man die Folge $(2,13,44,107,214,377,608,919,1322, \dots)$, welche mit den ersten Werten unserer Ausgangsfolge übereinstimmt, welche wir aber mithilfe von Newtons Verfahren logisch weiterführen konnten. Dies funktioniert nur, wenn die Folge arithmetisch ist, weil sie andernfalls nicht auf eine Differenzfolge zurückzuführen ist die nur aus Nullen besteht. Das bekannteste Gegenbeispiel ist die Folge der Zweierpotenzen $(1,2,4,8,16,32, \dots)$ mit den Differenzfolgen $(1,2,4,8,16,32, \dots)$, $(1,2,4,8,16,32, \dots)$, $(1,2,4,8,16,32, \dots)$ usw. Die Differenzfolgen ergeben also die Ausgangsfolge selbst. Man redet hier auch von einer invarianten Funktion der Differenzenrechnung¹⁵, mit dem Unterschied zur Analysis, dass die Basis 2 anstatt e ist. Man kann also aus jeder arithmetischen Folge mit Newtons Verfahren ein Polynom finden welches die Glieder der Folge wiedergeben kann. Während man das Differenzschema bildet kann man bereits weitere Eigenschaften über die Folge entnehmen. Hat man z.B. die folgende Ausgangsfolge (in rot und bereits mit Differenzschema),

0				
	1			
1		6		
	7		6	
8		12		0
	19		6	0
27		18		0
	37		6	0
64		24		0
	61		6	
125		30		
	91			
216				

Schema 6

dann sieht man, dass die vierte und jede weitere Differenzfolge aus Nullen besteht. Daraus folgt, dass die dritte Differenzfolge nur aus gleichen Elementen bestehen muss, also eine arithmetische Folge nullten Grades ist. Daraus folgt, dass die zweite Differenzfolge eine arithmetische Folge ersten Grades ist und dass die erste Differenzfolge eine arithmetische Folge zweiten Grades ist. Man kann daraus schließen, dass die Ausgangsfolge eine arithmetische Folge dritten Grades ist. Abgekürzt kann man sagen, dass die Anzahl der Differenzfolgen, die man nehmen kann und welche nicht nur aus Nullen bestehen, bestimmt, welchen Grad die

Ausgangsfolge hat. In unserem Fall sieht man drei Differenzfolgen (blau markiert). Das bedeutet, dass unsere Ausgangsfolge den Grad drei hat. Ein einziges Problem gibt es aber noch, nämlich was ist, wenn man nicht genug Glieder der Ausgangsfolge gegeben hat? Hat man z.B. nur die ersten drei Glieder der Folge in Schema 6 gegeben, dann kann man nur die ersten beiden Differenzfolgen bilden, aber man braucht mindestens noch die dritte Differenzfolge, um die Ausgangsfolge bestimmen zu können. Hätte man wirklich nur die ersten beiden Differenzfolgen, käme man auf das folgende Polynom: $3n^2 - 2n$, welches die folgende Folge ergibt: $(0,1,8,21,40, \dots)$. Die ersten drei Glieder stimmen, wie erwartet, mit der Ausgangsfolge überein, aber alles danach ist mehr oder weniger falsch, denn man kann ja nicht wissen, wie die Folge wirklich weitergeht. Man kann es nur vermuten. Hat man z.B. die Folge $(1,2,3)$ könnte man denken, dass nächste Glied 4 ist, aber es könnte auch 5 sein. Diese Elemente der Folge können nämlich nicht

¹⁵ Die Invariante Funktion der Analysis ist die e -Funktion $f(x) = e^x$

nur durch das Polynom $f(n) = n + 1$ beschrieben werden, sondern auch durch die folgenden Polynome

$$f(n) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{4}{3}n + 1, \quad f(n) = \frac{1}{120}n^5 - \frac{1}{12}n^4 + \frac{7}{24}n^3 - \frac{5}{12}n^2 + \frac{6}{5}n + 1$$

oder allgemeiner: $f(n) = 1 + n + x$, wobei x irgendeine Summe aus Vielfachen von Binomialkoeffizienten ist, welche ein k von mindestens 4 haben¹⁶. In anderen Worten: Man kann nie eine eindeutige richtige Formel finden, aber es gibt Methoden, die die wahrscheinlichste berechnen können. Wie gesagt, die mit Abstand wahrscheinlichste Formel für die Folge (1,2,3) ist $f(n) = n + 1$ oder $f(n) = n$, aber es gibt noch unendlich viele andere Formeln. Ein Merkmal dafür, dass es sich um eine arithmetische Folge handelt, ist, dass man bei Bilden der Differenzfolgen irgendwann auf eine Differenzfolge stößt, welche nur aus Nullen besteht. Meistens kann man sagen, wenn man auf eine Differenzfolge stößt, die ausschließlich aus (mindestens) zwei Nullen besteht, dass es sich um eine arithmetische Folge handelt, sicher kann man sich aber nie sein. Theoretisch reicht es sogar schon, auf eine Differenzfolge zu stoßen, welche nur aus identischen Gliedern besteht, was den gleichen Effekt hat wie eine Folge ausschließlich aus Nullen, da identische Glieder eine nächste Differenzfolge ausschließlich aus Nullen impliziert. Im Falle von Schema 6 bedeutete das, dass man mindestens die ersten 5 Glieder bräuchte, um sicher zu stellen, dass es sich um eine arithmetische Folge handelt und welchen Grad die Folge hat. Wenn es schon gegeben ist, dass es sich um eine arithmetische Folge handelt, reichen sogar die ersten vier Glieder, da diese vier Glieder die wirklich nötigen ersten Glieder der Differenzfolgen bilden. Da die Frage, um die es in der Facharbeit geht, impliziert, dass es eine arithmetische Folge ist, die gegeben ist, kann man letzteres annehmen. Da man bei $k + 1$ Gliedern nur k Differenzfolgen bilden kann, ist es nicht schlimm zu sagen, dass es sich um eine arithmetische (Anfangs)Folge k -ten Grades handelt. Bei mehr als $k + 1$ Gliedern sähe man sowieso, dass es eine arithmetische Folge k -ten Grades ist (falls nicht, sind es schlicht zu wenig gegebene Glieder).

¹⁶ Beweisansatz s. Anhang

8 Zusammenfassung

Die Frage war, wie man aus jeder arithmetischen Folge k -ten Grades das Bildungsgesetz dieser Folge findet, sofern mindestens $k + 1$ aufeinanderfolgende Elemente dieser Folge vorhanden sind. Möglich ist dies durch ein Verfahren, das Newton entwickelt hat. Dieses Verfahren kann ein Bildungsgesetz für jede beliebige Folge finden, ob arithmetisch oder nicht, aber es kann dies bei allen nicht arithmetischen Folgen nur für die gegebenen Glieder tun. Man kann damit also nicht ein weiteres Glied erschließen. Bei arithmetischen Folgen ist es anders, denn hat man eine arithmetische Folge k -ten Grades (d.h. die Glieder der Folge können durch ein Polynom k -ten Grades berechnet werden) und bildet die k -te Differenzfolge, dann sind die Glieder dieser Folge alle gleich (arithmetische Folge nullten Grades). Daraus folgt, dass die nächste Differenzfolge nur aus Nullen bestehen kann, da die Differenz zweier gleicher Werte immer 0 ist. Die dadurch entstandene Folge ist immer noch vom Grad 0, aber sie besteht nur aus Nullen. Alle weiteren Differenzfolgen bestehen auch nur aus Nullen. Will man jetzt von der arithmetischen Folge k -ten Grades das $(k + 1)$ -te gegebene Element berechnen, dann ist dies kein Problem, denn es ist gegeben. Trotzdem lässt es sich mit der Formel von Newton berechnen. Um jetzt aber das $(k + 2)$ -te Element berechnen, würde Newtons Formel eigentlich nicht funktionieren, da aber die weiteren Differenzfolgen sowieso nur aus Nullen bestehen, haben sie keinen Einfluss auf alle anderen Elemente oder die Formel, was aber nur bei arithmetischen Folgen so ist. Konkret muss man bei der gegebenen Folge das erste Element nehmen und mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}$, bzw. 1 multiplizieren. Das erste Element der ersten Differenzfolge muss mit $\binom{n}{1}$ bzw. n multipliziert werden. Das erste Element der zweiten Differenzfolge muss mit $\binom{n}{2}$ multipliziert werden und so weiter, bis man auf die Differenzfolge stößt, die nur aus Nullen besteht. Mit dieser Differenzfolge muss man nichts machen. Hat man also nun all diese Werte berechnet, addiert man sie einfach zusammen. Wenn D_0^k das erste Glied einer k -ten Differenzfolge ist und a_0 , das erste Glied der Ausgangsfolge, dann ist die Formel zur allgemeinen Berechnung des n -ten Gliedes der arithmetischen Folge k -ten Grades $f(n) = a_0 + D_0^1 \times n + D_0^2 \times \binom{n}{2} + D_0^3 \times \binom{n}{3} + \dots + D_0^k \times \binom{n}{k}$, oder kompakter $f(n) = a_0 + \sum_{i=1}^k D_0^i \binom{n}{i}$. Dieser Vorgang ist sozusagen das diskrete Analogon zur Taylorreihenentwicklung, da auch das Bilden von Differenzfolgen ähnlich ist wie das Berechnen einer Ableitung, welche bei Polynomen angewandt auch zu 0 führt. Wie viele andere Themen der Mathematik, ist das der arithmetischen Folgen insbesondere höherer Ordnung, nicht von alltäglichem Gebrauch, aber darum geht es auch nicht

immer, denn allein schon das Verstehen dieses und vieler anderen Themen kann einem ein tieferes Verständnis der Mathematik verschaffen.

9 Anhang

Berechnung von Stirlingzahlen erster Art

Stirling Zahlen erster Art (ab jetzt nur Stirling Zahlen genannt) können wie folgt dargestellt werden: $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$. Die Ähnlichkeit mit dem Binomialkoeffizienten ist nicht unbegründet, da die Bildung sehr ähnlich ist.

k \ n	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0
4	0	6	11	6	1	0
5	0	24	50	35	10	1

In Tabelle 4 sind die Werte von n und k von 0 bis 5 eingetragen. Man kann z.B. ablesen, dass $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 11$ ist. Das

rekursive Bildungsgesetz lautet $\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] = n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]$

wohingegen das Bildungsgesetz für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Tabelle 4

lautet. Gleichzeitig sind sie die Koeffizienten von der steigenden Fakultät $n^{\bar{x}} = n(n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+x-1)$, deswegen auch die Ähnlichkeit mit dem Binomialkoeffizienten. Beispielsweise ist $n^{\bar{3}} = n(n+1)(n+2) = (n^2+n)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$. Die Koeffizienten sind 1, 3 und 2, welche sich in der dritten Reihe in Tabelle 4 wiederfinden. Will man sie explizit berechnen, hat man die Werte von n und k in die folgende Formel einzusetzen:

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right] = (n-1)! \times \left(\sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-1} \sum_{i_3=i_2+1}^{n-1} \dots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{n-1} \frac{1}{i_1 \times i_2 \times i_3 \times \dots \times i_{k-1} \times i_k} \right)$$

Keine sehr kompakte Formel im Vergleich zu der des Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Polynomdarstellung von arithmetischen Folgen erster Ordnung

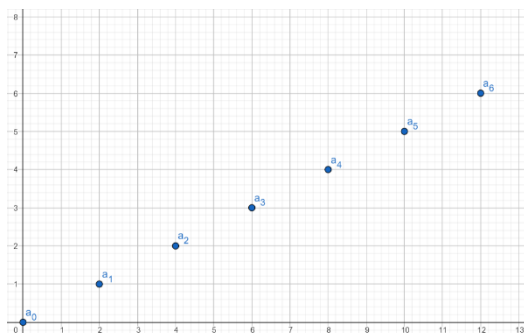


Abb. 4, Werte einer arithmetischen Folge (0; 0.5; 1; 1.5; 2;...)

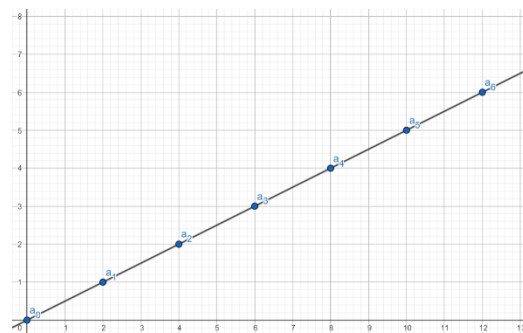


Abb. 5, Graph, welcher durch alle Punkte der Folge geht $f(n)=0.5n$. n kann hierbei auch wie der Index der Folge benutzt werden, dennoch ist in diesem Falle ein Wert für nicht natürliche n definiert.

Diese zwei Grafiken sollen veranschaulichen, dass es durchaus ein Polynom geben kann, welches eine arithmetische Folge (in diesem Fall erster Ordnung) beschreibt. Somit ist ein Polynom, welches dies tut, eine Fortsetzung, da nicht mehr die natürlichen Zahlen auf die reellen abgebildet (Folge-Index abgebildet auf Wert des Folge-Index) werden, sondern die reellen auf die reellen.

Summenschreibweise

Wenn man eine Summe von vielen Elementen bilden möchte, ist es umständlich zu schreiben $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$. Stattdessen kann man dies mit dem griechischen Großbuchstaben Sigma ausdrücken.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

Für das obige Beispiel bedeutet das, dass die Laufvariable i ist, diese bei 0 anfängt und bei n aufhört. Jeder Wert von i muss in den Ausdruck neben dem Sigma Zeichen gesetzt werden und der sich ergebende Termwert muss auf das Gesamte addiert werden. So kann man auch die Summation von den ersten n natürlichen Zahlen abkürzen mit

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \sum_{i=1}^n i$$

Polynome, die bestimmte Anfangsglieder gleich haben

Hat man eine Folge $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$, dann soll gezeigt werden, dass es beliebig viele Polynome gibt, die diese $n+1$ Glieder für $n = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ bilden. Sagen wir, man bildet alle n Differenzfolgen dieser Anfangsglieder, dann ist in der n -ten Differenzfolge nur noch ein einziges Element übrig, nämlich D_0^n . Nimmt man, an ein weiteres Glied zu dieser n -ten Differenzfolge hinzuzufügen, dann hat dieses neue Glied keinerlei Einfluss auf die bisherigen Elemente aller Differenzfolgen und der Ausgangsfolge. Es fügt nämlich nur ein neues Element (pro Folge) hinzu, sodass die

Länger der Folgen sich um eins erhöhet. Beispielsweise bei der Folge (1,4,7,9) sind die Differenzfolgen (3,3,2), (0,−1) und (−1). Erweitert man die letzte Differenzfolge (−1) um ein Element, erhaltet man die folgende: (−1, X). Daraus lässt sich ein weiteres Element in der vorherigen Differenzfolge (0,−1) bilden, und zwar entsteht die Folge (0, −1, −1 + X). Das überträgt sich wiederum auf die vorherige Differenzfolge, was zu der neuen Folge (3,3,2,2 − 1 + X) führt. Schließlich hat man eine neue Ausgangsfolge (1,4,7,9,9 + 2 − 1 + X), oder (1,4,7,9,10 + X). Aber weil man ja jetzt die letzte Differenzfolge um ein Element erweitert hat, kann man nun eine weitere Differenzfolge bilden, nämlich (X − (−1)), oder einfach (X + 1). Nach Newton kann die Ausgangsfolge durch den Ausdruck $P = 1 \times \binom{n}{0} + 3 \times \binom{n}{1} + 0 \times \binom{n}{2} + (-1) \times \binom{n}{3}$ berechnet werden. Nun aber ist die neue Bildungsvorschrift $P + (X + 1) \times \binom{n}{4}$. Da dieser neue Summand erst einen Wert ungleich 0 annimmt, wenn n größer gleich 4 ist, hat er keinen Einfluss auf die Ausgangsfolge, aber die Bildungsvorschriften unterscheiden sich trotzdem. Allgemein kann man also sagen, dass bei einer Folge $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$ das Bildungsgesetz $f(t) = \sum_{i=0}^n a_i \times \binom{t}{i}$ (für das t -te Glied, mit $0 \leq t \leq n$) ist, durch Hinzufügen eines Elementes X zur letzten Differenzfolge ändert sich jedoch das Bildungsgesetz zu $g(t) = f(t) + (X - D_0^n) \times \binom{t}{n+1}$. f bleibt als Summand, denn die ersten Glieder der Differenzen ändern sich nicht, es kommt nur ein weiteres erstes Glied einer weiteren Differenzfolge hinzu, nämlich $X - D_0^n$. Da man jetzt erneut eine letzte Differenzfolge hat, kann man die gleiche Prozedur nochmal anwenden um eine neue Bildungsvorschrift zu bekommen: $h(t) = g(t) + (Y - (X - D_0^n)) \times \binom{t}{n+2}$, diesmal durch Hinzufügen des Elementes Y zu der letzten Differenzfolge. Das kann man beliebig oft wiederholen und die Variablen $(X, Y, \dots)$ frei wählen. Aus diesem Grund können beliebig viele Polynome die gleichen Anfangsglieder haben.

Bekannte Formel für bestimmte Folgen

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\binom{1}{k} + \binom{2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \text{ (vgl. Schneider 1993, S. 133, Z. 13f)}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Viele weitere zu finden in „Johannes Faulhaber“ (s. Literaturverzeichnis).

Quellen-/Literaturverzeichnis

Literatur

- Schneider, Ivo: *Johannes Faulhaber. Rechenmeister in einer Welt des Umbruchs*. Emil A. Fellmann (Hrsg.), 7. Bd., 1. Aufl., Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag 1993
- Mikultis, Ing. Joh.: *Mathematik „einmal anders“ für jedermann. Das Summierungsgesetz der figurierten Reihen, das Pascalsche Dreieck und das Fermatproblem*. 1. Bd., 1. Aufl., Linz: Eigenverlag 1953
- Ziegenbalg, Jochen: *Figurierte Zahlen. Veranschaulichung als heuristische Strategie*. 1. Bd., 1. Aufl., Wiesbaden: Springer Spektrum 2018
- Professor Karl Dienger: *Beiträge zur Lehre von den arithmetischen und geometrischen Reihen höherer Ordnung*. Rastatt: Greiser 1910

Internetquellen

- https://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_numbers_of_the_first_kind
(zuletzt bearbeitet am: 20.01.2019, 16:32)
- <https://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2017/01/20-Differentialrechnung.pdf> (entnommen am: 02.03.2019)
- James Alonso: *Arithmetic Sequences of higher Order*.
<https://www.fq.math.ca/Scanned/14-2/alonso.pdf>

Bildquellen

- Abb. 4 und Abb. 5: GeoGebra, <https://www.geogebra.org/download>

Sonstige Quellen

- Scratch 2.0 Offline Editor,
<https://downloads.scratch.mit.edu/desktop/Scratch%20Desktop%20Setup%201.2.1.exe> (half durch selbstgemachtes Programm mit Scratch)